

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>

@uedUniandes

La comprensión en trigonometría en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

Autor. Jonny Rafael Plazas Alvarado

Universidad Minuto de Dios

Sábado, 29 de Agosto de 2020

Para utilizar la trigonometría para determinar la ubicación, necesita la longitud de al menos uno de los lados del triángulo. Un dispositivo GPS hace esto calculando el tiempo que tarda la señal del satélite para llegar a él. Debido a que la velocidad de las señales de radio es la misma que la velocidad de la luz, la unidad determina con precisión la distancia a un satélite multiplicando el tiempo de viaje de la señal por la velocidad de la luz.



¿En donde se dan los
primeros acercamientos a
trigonometría, de los
jóvenes en Colombia?

¿Habilidades?

Propiedades del Triangulo

Razones trigonométricas

Identidades trigonométricas

Teorema del Seno & Coseno

Área del Triangulo

Circulo - Circunferencia

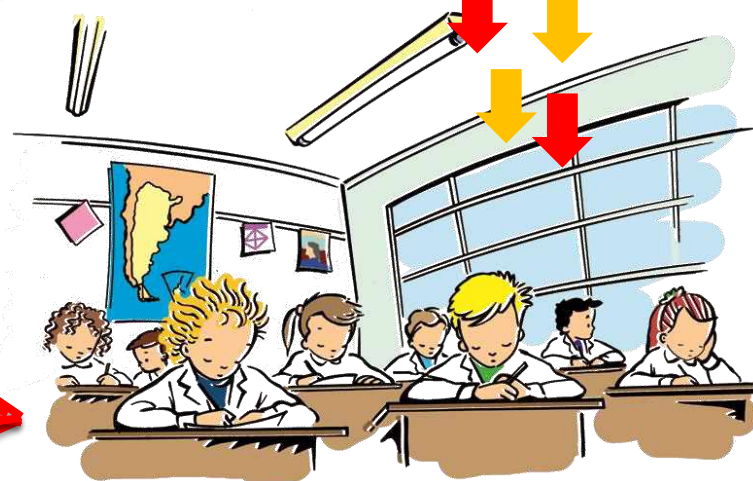
Teorema de Pitágoras

Operaciones con Áreas

Área del Triangulo

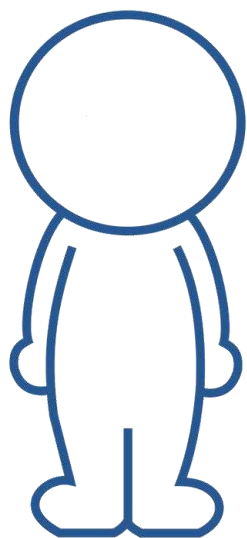
Perímetro de Formas

Básica Secundaria



Aula de la Básica Primaria

¿Comprensión?



Formación Profesional

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico y rutinario, sin ningún sentido ni utilidad para los estudiantes si no se les brindan las condiciones para que logren una comprensión profunda, dinámica y utilitaria de estos conceptos, sus propiedades y relaciones. Por esta razón, es importante para los estudiantes que el tema incluya no solo una serie de conceptos y fórmulas, sino también herramientas y estrategias útiles para explorar, **relacionar, conjeturar y demostrar.**

Ciencias básicas comunes	MATE 1020 Precálculo	MATE 1061 Calculo Diferencial	MATE 1051 Cálculo Integral	FISI 1040 Fisica electrica	
	H 6 C 3	H 4 C 3	H 4 C 3	H 4 C 3	
		FISI 1010 Física Mecánica	FISI 1020 Fisica fluidos y termodinamica		
		H 4 C 3	H 4 C 3		
C. básicas específicas	MATE 1030 Geometria	MATE 1036 Algebra lineal		MATE 1100 Calculo multivariado	MATE 1130 Ecuaciones diferenciales
	H 4 C 2	H 4 C 2		H 4 C 3	H 4 C 2
		IAGR 1041 Quimica			
		H 4 C 3			

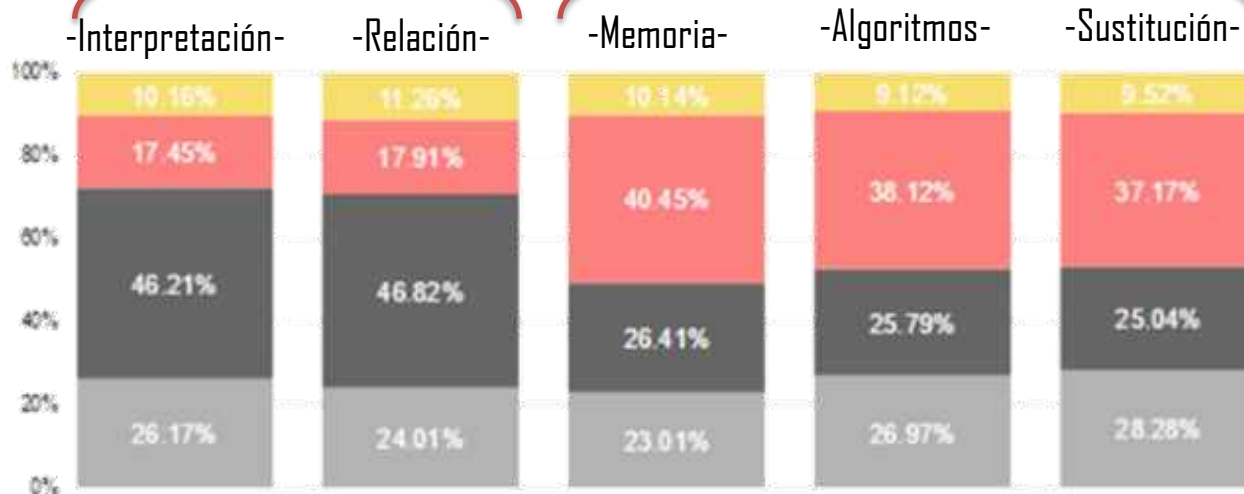
Estrategias y Teorías Pedagógicas

Comprensión

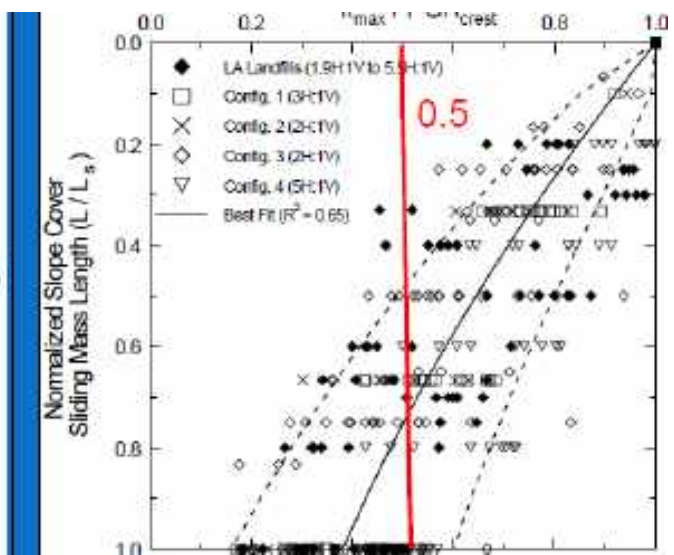
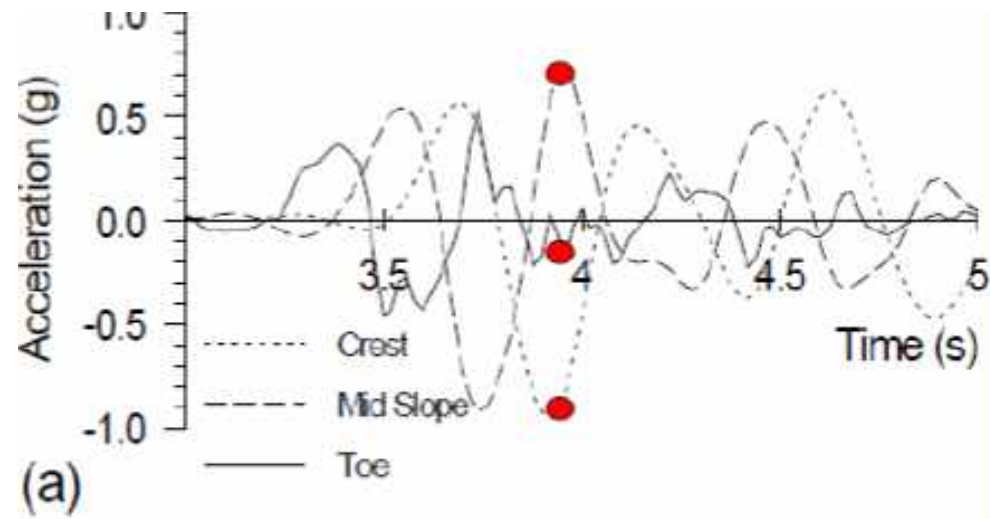
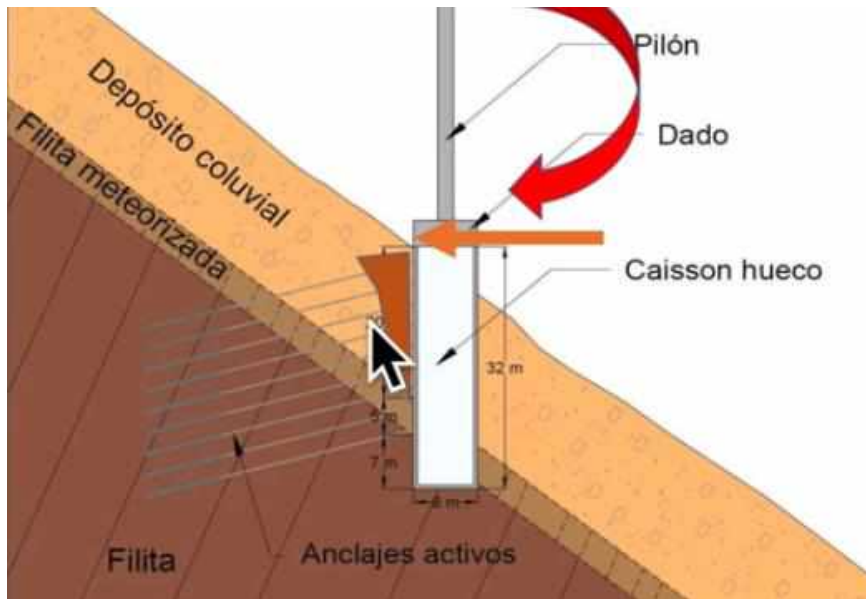
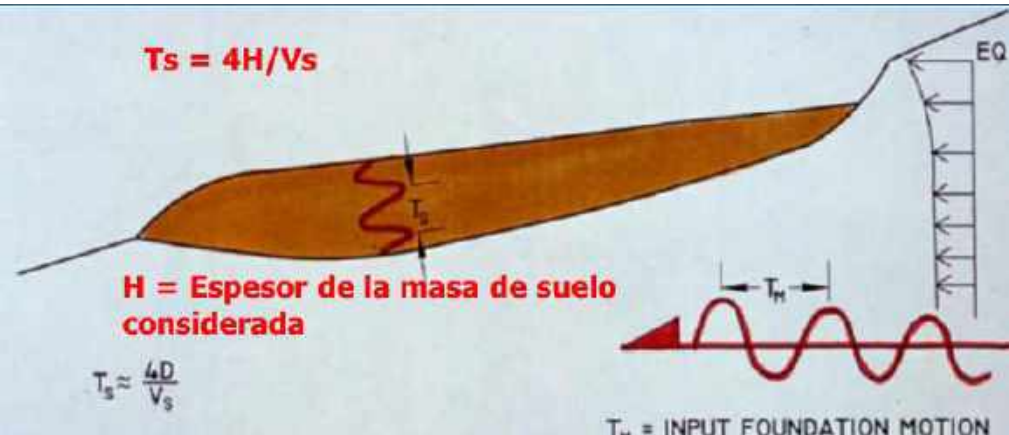


Habilidades Conjetura

Habilidades Procedimentales







Objetivo

*¿Cómo la implementación de una unidad didáctica basada en el marco de la **teoría de Pirie y Kieren** incide en la comprensión de los procesos de demostración que conllevan a expresiones que representan el área de una región delimitada entre sectores circulares y cuerdas de circunferencia, en los estudiantes de Ingeniería de la Corporación Universitaria Minuto de Dios, Centro regional Zipaquirá?*



*Analizar la influencia de la aplicación de una unidad didáctica basada en el marco de la **teoría de Pirie y Kieren (P&K)** que incide en la comprensión de los procesos de demostración, que conllevan a expresiones que representan el área de una región delimitada entre sectores circulares y cuerdas de circunferencia en los estudiantes de Ingeniería de la Corporación Universitaria Minuto de Dios, Centro regional Zipaquirá*

Objetivos Específicos

1



Identificar las nociones o conocimientos existentes en el grupo de estudiantes alrededor de los procesos de demostración de expresiones que representan el área de una región delimitada, con el fin, de definir las acciones de complementariedad establecidas en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

2



Diseñar una unidad didáctica basada en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, que permita la consecución de los niveles de comprensión en el estudiante, a la hora de establecer procesos de demostración que conlleven a expresiones que representan el área de una región delimitada.

3



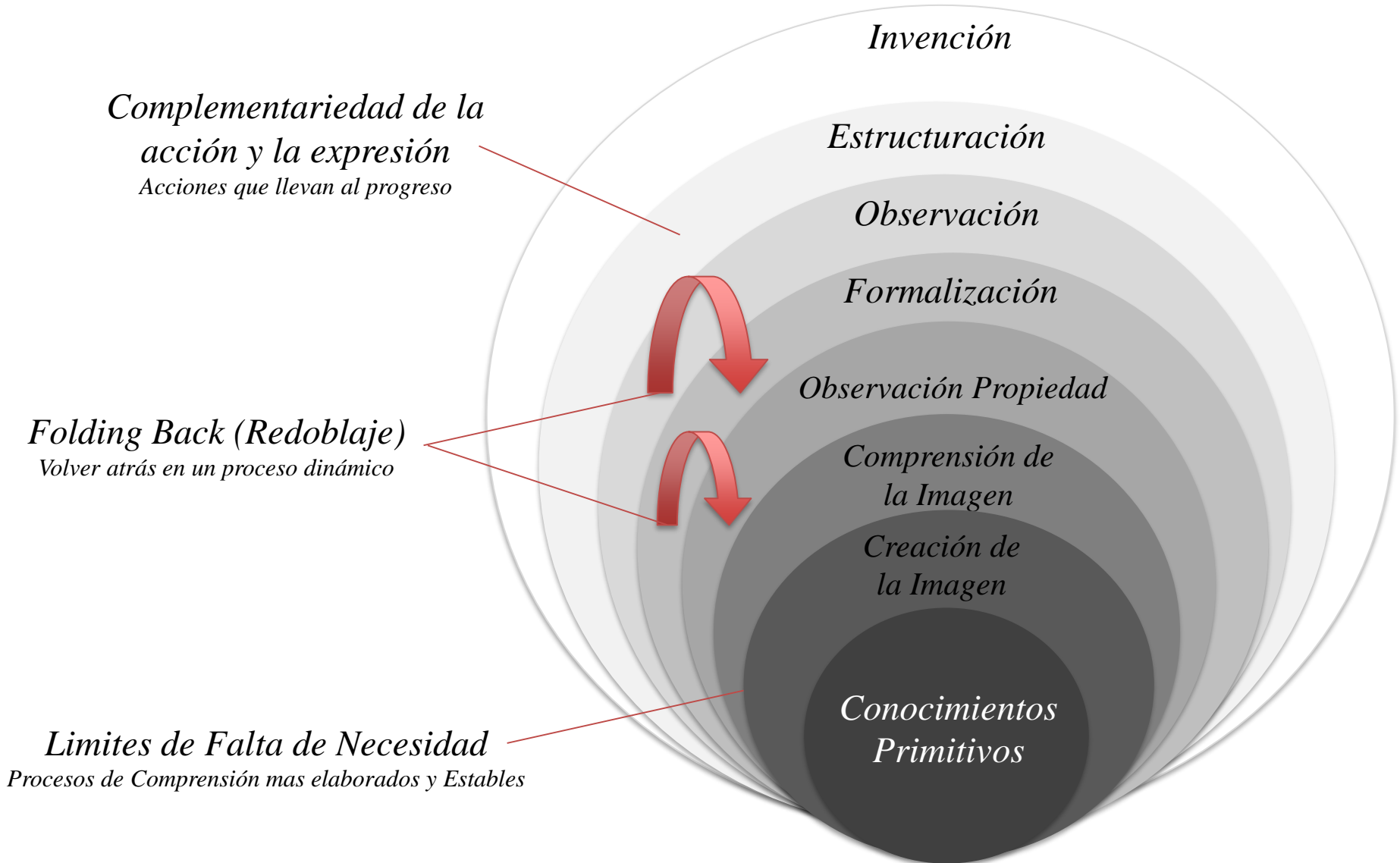
Aplicar la unidad didáctica, con el fin de articular los niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren, con los conocimientos primitivos identificados en el grupo de estudiantes.

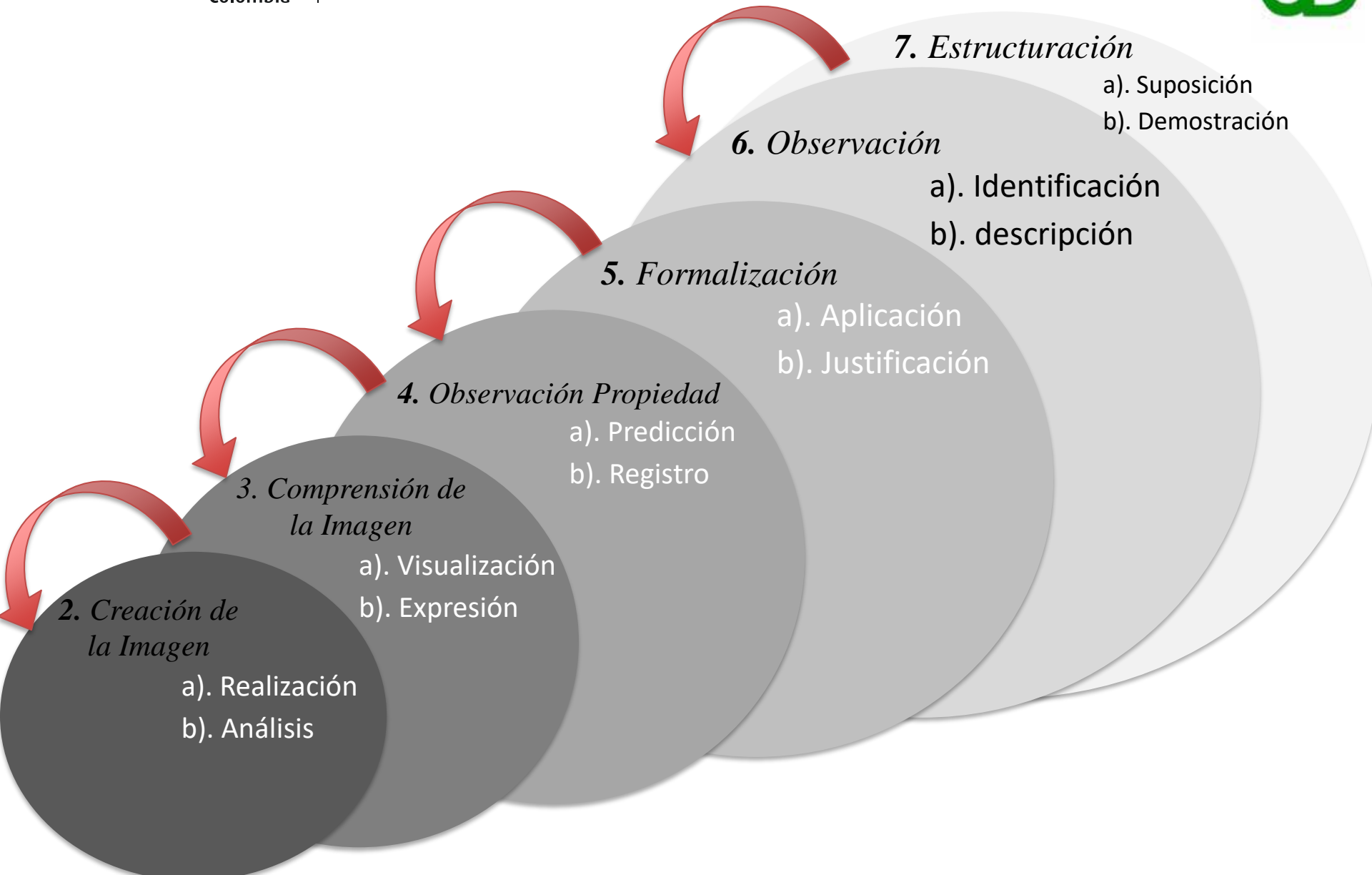
4



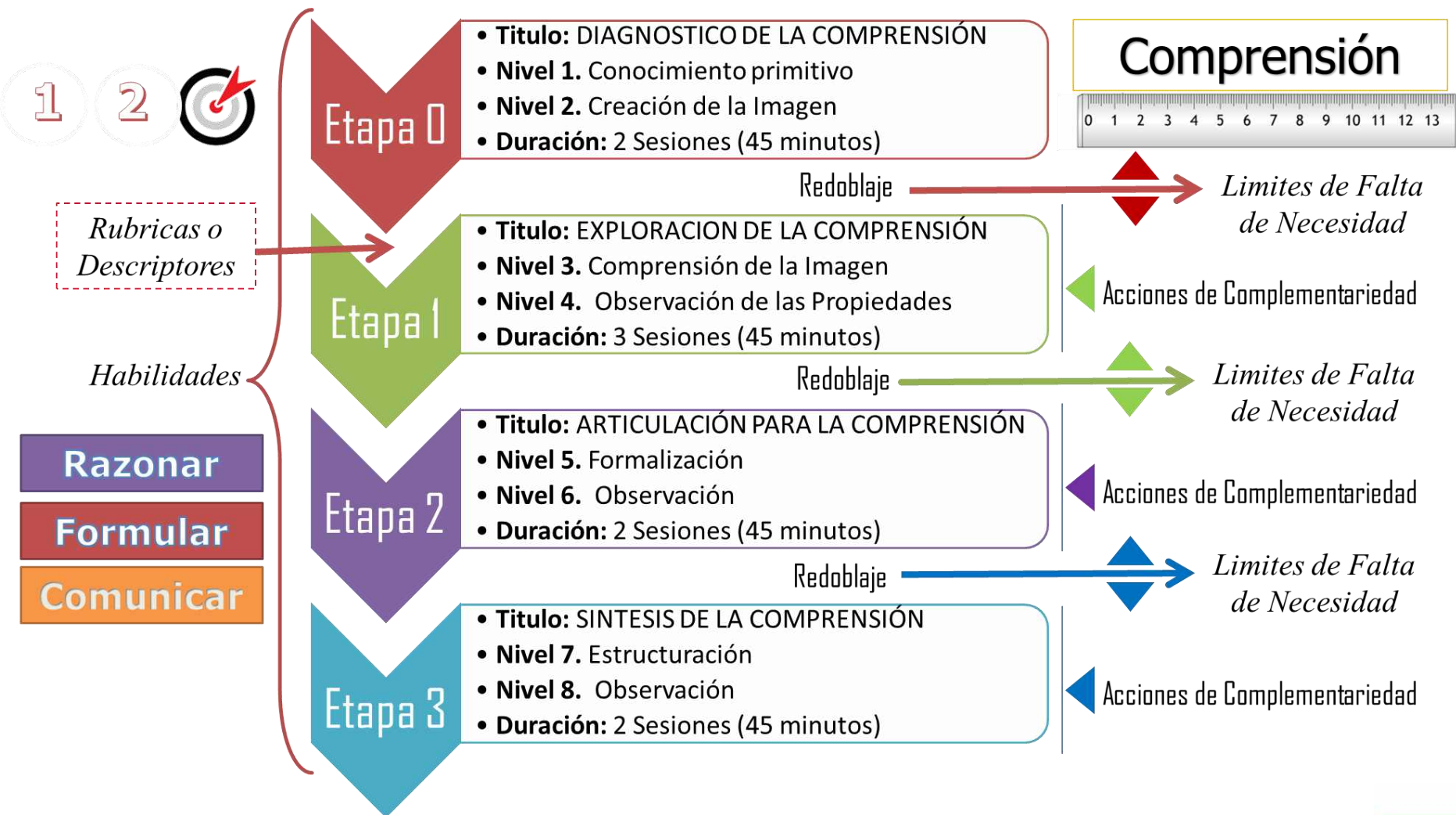
Determinar la influencia de la unidad didáctica implementada desde el marco de la teoría de Pirie y Kieren, con el fin de reconocer los alcances logrados entorno a la comprensión en los procesos de demostración que conlleven a expresiones que representan el área de una región delimitada.

Teoría de Pirie y Kieren





Etapas de Investigación

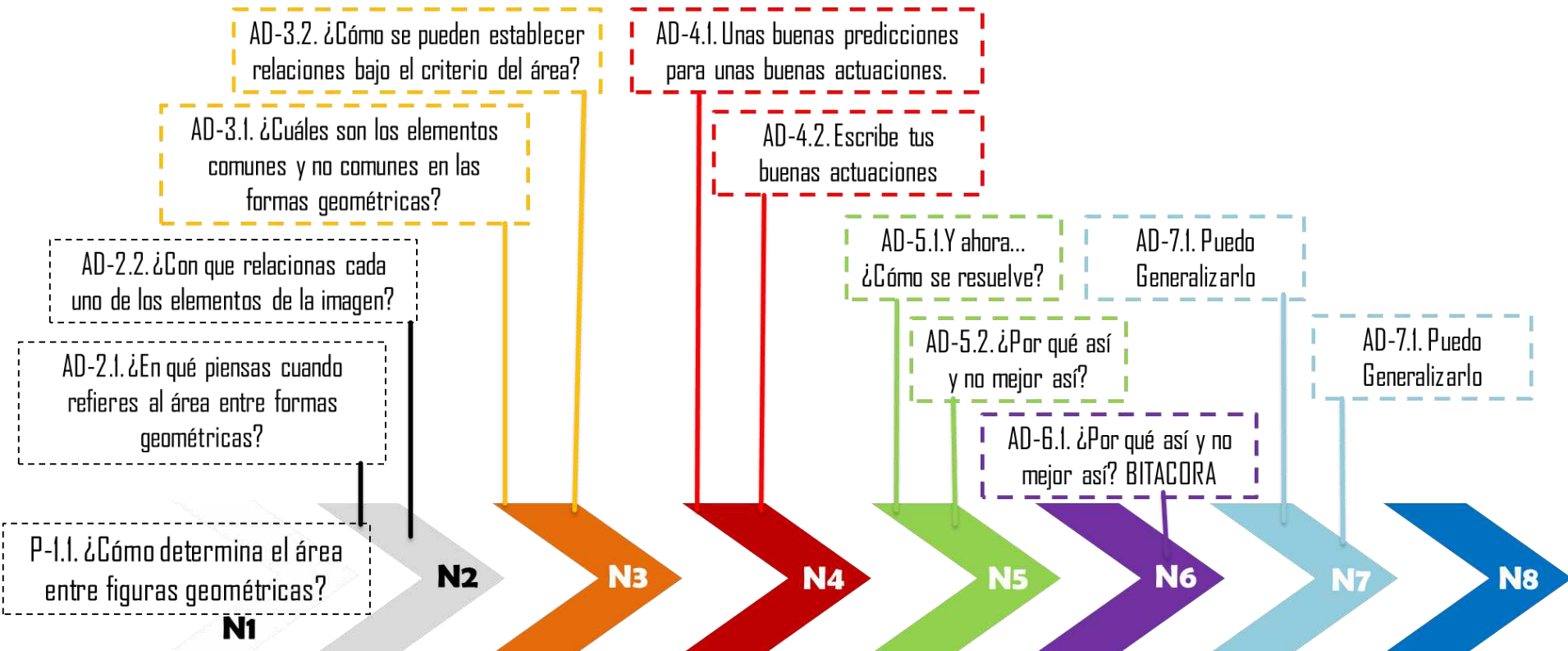


Trabajo de Campo

3



El desarrollo del trabajo de campo esta definido gracias al desarrollo del conjunto de actividades que conforman la Unidad didáctica.



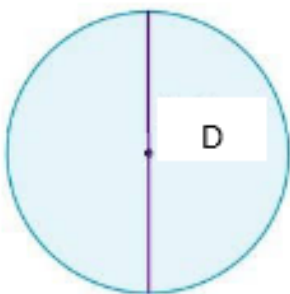


TITULO	¿Cómo determinar el área entre figuras geométricas?				COD.	P-1.1.
Objetivo (OP-1.1.)	Identificar en el grupo de estudiantes los conocimientos que se tiene acerca del estudio de áreas entre figuras geométricas por medio de la aplicación de una prueba escrita diagnóstica.					
Tiempo de duración.	45 minutos	Sesiones de clase	Una	Lugar	Salón Math II	
Nombre del estudiante				Edad		

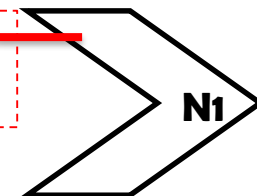
Marque con una X, la respuesta que considere acertada y además responda en los espacios indicados a las preguntas que se sugieren.

1. ¿Cuándo se conoce el diámetro (D) de una circunferencia es posible determinar su área?

- No es posible, puesto que el área de una circunferencia se determina a partir del producto entre el cuadrado del radio y π .
- Si es posible, en tanto que el diámetro es el doble del radio, por consiguiente, es cuestión de establecer el producto entre el radio y π .
- No es posible, puesto los datos son insuficientes para determinar el área, es necesario conocer la longitud de la circunferencia.
- Si es posible, en tanto que la mitad del diámetro equivale al radio, por consiguiente, es cuestión de establecer el producto entre el cuadrado del radio y π .



P-1.1. ¿Cómo determina el área entre figuras geométricas?



sumarla al área de la circunferencia.

6. Si el área de un círculo está definida como $A = \pi r^2$, entonces si tomamos la octava parte del área de dicho círculo, se obtiene que:



A).
 $A = \frac{\pi}{8} r^2$

☒ B).
 $A = \frac{\pi r^2}{8}$

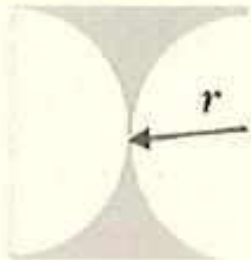
C).
 $A = \pi \frac{r^2}{8}$

D).
 $A = \pi \frac{r^2}{4}$

6.1. ¿Cuáles son las razones que le han llevado a escoger esta opción? Describa brevemente dichas razones.

debido a que el Área total del círculo equivale a $\pi \cdot r^2$, entonces para tomar la octava parte del área, habría que dividir la total en ocho, $A = \frac{\pi \cdot r^2}{8}$

9. Y si el círculo de radio (r) que se ubica al interior del cuadrado, ahora se parte a la mitad, como se observa en la figura, ¿cuál expresión corresponde al área sombreada?



☒ A).
 $A = (2r)^2 - \pi r^2$

B).
 $A = \pi r^2 - (2r)^2$

C).
 $A = 2\pi r - (2r)^2$

D).
 $A = \pi \frac{r^2}{4}$

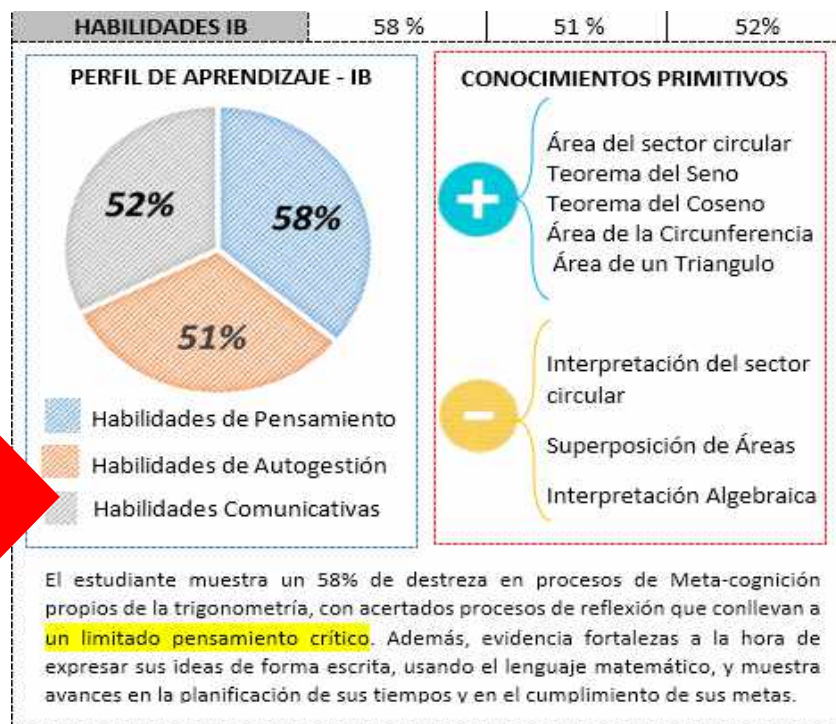
Sabías que estas figuras, podrían mencionarse como un círculo inscrito en un cuadrado

9.1. ¿Cuáles son las razones que le han llevado a escoger esta opción? Describa brevemente dichas razones.

No importa que el círculo este distribuido diferente, igual va a tener la misma área

preguntas
Correctas

NIVEL 1	Conocimiento primitivo		
ACTIVIDAD	¿Cómo determinar el área entre figuras geométricas?	COD	P-1.1.
NIVEL	DESCRIPTOR DE LOS ASPECTOS E INDICADORES		
0	La actividad no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.		
≤ 4 Preguntas correctas	<p>El conocimiento y la comprensión son limitados.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección de conceptos es poco pertinente y solo parcialmente apropiada para la solución de las preguntas. Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son anecdóticas, no estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas y no explicativas. <p>El uso de la terminología y los conceptos es poco claro y limitado.</p> <ul style="list-style-type: none"> Es evidente que los conceptos específicos de la asignatura están ausentes o son inexactos, lo cual demuestra conocimiento y comprensión limitados. 		
≥ 5 Preguntas correctas	<p>El conocimiento y la comprensión son buenos.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección de conceptos, en su mayor parte, es pertinente y apropiada para la solución de las preguntas. Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son parcialmente, no estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas y no explicativas. <p>El uso de la terminología y los conceptos es adecuado.</p> <ul style="list-style-type: none"> El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es, en su mayor parte, exacto y demuestra un nivel adecuado de conocimiento y comprensión. 		
≥ 7 Preguntas correctas	<p>El conocimiento y la comprensión son excelentes.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección de conceptos es claramente pertinente y apropiada para la solución de las preguntas. Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son claras y coherentes, y siempre usa un lenguaje explicativo. <p>El uso de la terminología y los conceptos es bueno.</p> <ul style="list-style-type: none"> El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es exacto y coherente, y demuestra un nivel eficaz de conocimiento y comprensión. 		



Criterio	Categoría	Estudiante Seleccionado
≤ 4 preguntas correctas	Estudiante de un Nivel bajo de aprendizaje ■	Vilma y Mafalda ^s
≥ 30 % Perfil de aprendizaje		
≥ 5 preguntas correctas	Estudiante de un Nivel medio de aprendizaje ■	Maximus y Bruce
≥ 50 % Perfil de aprendizaje		
≥ 7 preguntas correctas	Estudiante de un Nivel alto de aprendizaje ■	Tk Man y Candy
≥ 70 % Perfil de aprendizaje		

<p>≥ 7 Preguntas correctas</p>	<p>El conocimiento y la comprensión son excelentes.</p> <ul style="list-style-type: none"> • La selección de conceptos es claramente pertinente y apropiada para la solución de las preguntas. • Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son claras y coherentes, y siempre usa un lenguaje explicativo. <p>El uso de la terminología y los conceptos es bueno.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es exacto y coherente, y demuestra un nivel eficaz de conocimiento y comprensión.
------------------------------------	---

P-1.1. ¿Cómo determina el área entre figuras geométricas?

Nivel 1

<p>≥ 5 Preguntas correctas</p>	<p>El conocimiento y la comprensión son buenos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • La selección de conceptos, en su mayor parte, es pertinente y apropiada para la solución de las preguntas. • Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son parcialmente, no estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas y no explicativas. <p>El uso de la terminología y los conceptos es adecuado.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es, en su mayor parte, exacto y demuestra un nivel adecuado de conocimiento y comprensión.
------------------------------------	---

- Vilma
- Bruce
- Mafalda
- Tk Man
- Maximus
- Candy



TITULO	¿En qué piensas cuando refieres al área entre formas geométricas?				COD.	AD-2.1.
Objetivo (OD-2.1.)	Reconoce y construye intersecciones entre figuras geométricas con el fin de validar posibles áreas entre dichas figuras.					
Pensamiento	Espacial y sistemas geométricos.		Acción Complementaria		Realización de la Imagen	
Tiempo de duración.	45 minutos	Sesiones de clase		Una	Lugar	Salón Math
Nombre del estudiante					Edad	

Para el desarrollo de la presente actividad es importante el seguimiento de las instrucciones por parte del supervisor, para ello es necesario leer las siguientes indicaciones.

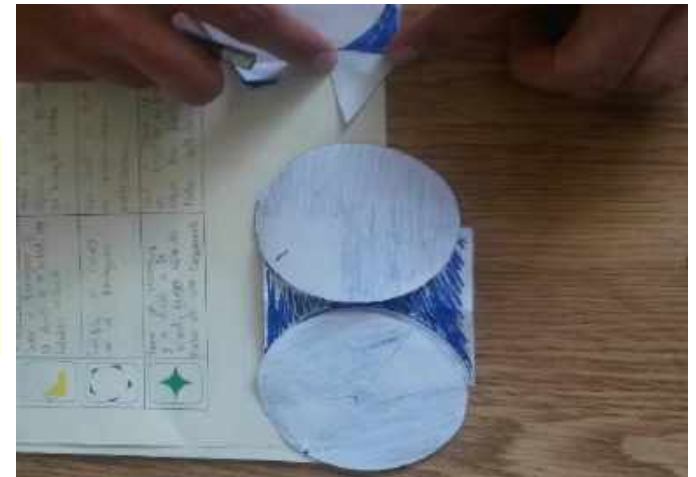
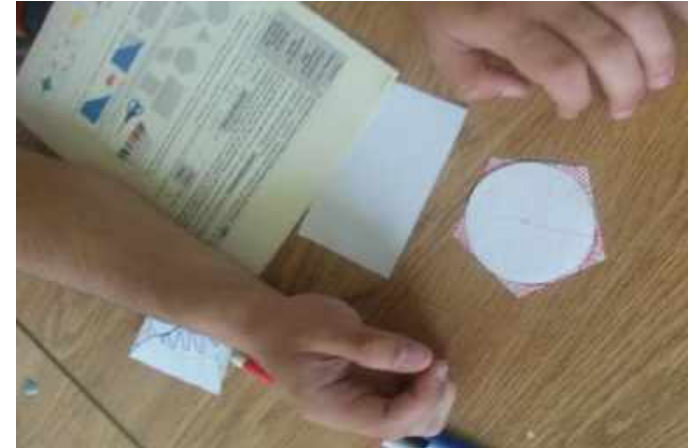
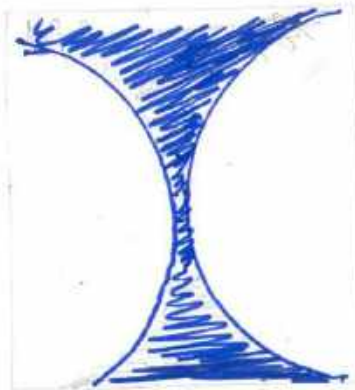
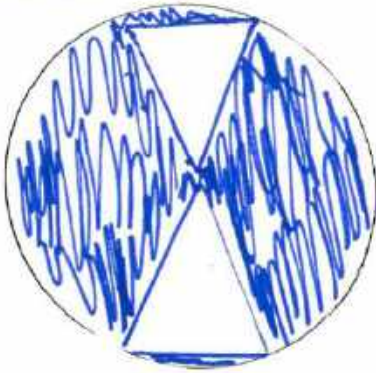
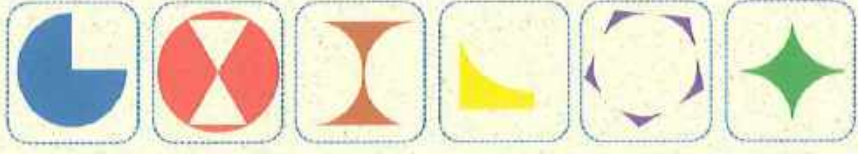
1. Asegúrate de tener los siguientes materiales suministrados por el supervisor de la sesión. Estos materiales elaborados en cartulina iris, serán indispensables para la clase. (2 Piezas de cada uno)







AD-2.1. ¿En qué piensas cuando refieres al área entre formas geométricas?

AD-2.2. ¿Con que relacionas cada uno de los elementos de la imagen?

Realiza entonces las siguientes construcciones.



	¿Cuéntanos como conformaste el área?	¿Qué sucedió en el proceso?
	<p> tome la mitad de un círculo y la superpuse para que su diámetro sea un lado del cuadrado </p>	<p> tome un círculo y al dóblalo a la mitad lo use en ambos lados del cuadrado </p>

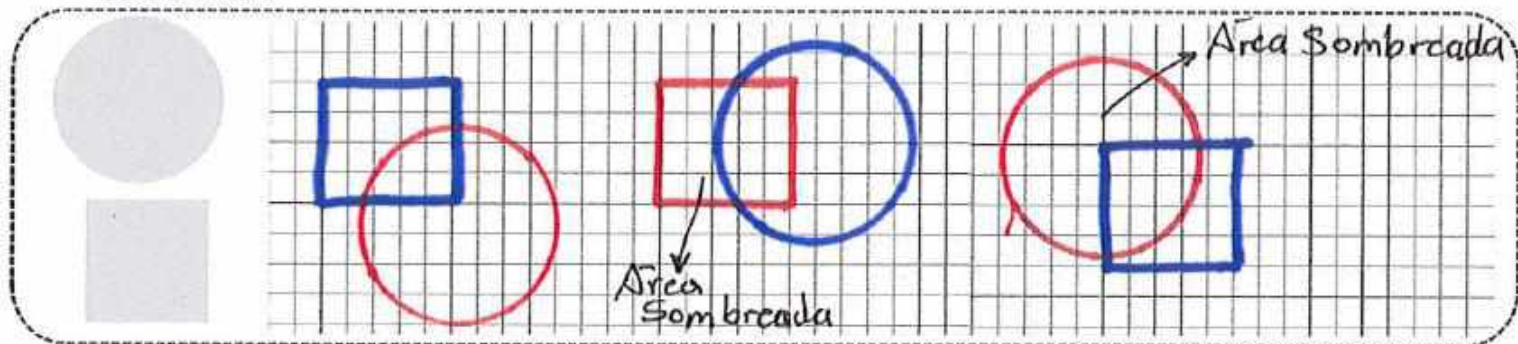
ACTIVIDAD	M		
	Estudiante No.8	Estudiante No.12	Estudiante No.15
	Evidencia una interpretación coherente del área sombreada, relaciona las formas en el proceso de resta de áreas. Aunque a la hora de justificar no usa los términos adecuados a la acción.	Cuando realiza la superposición de las figuras evidencia falta de comprensión entre las figuras a relacionar	Es contundente en la medida que logra interpretar de manera inmediata las relaciones entre las formas geométricas, aunque a la hora de escribir sus acciones no emplea algunos términos adecuados.
	<ul style="list-style-type: none"> La selección de las formas geométricas son pertinentes en la determinación del área de la región sombreada. Las justificaciones que se dan acerca del proceso, son totalmente validas, incluso propone otros caminos de solución acertados para hallar la misma área. 	<ul style="list-style-type: none"> La selección de las formas geométricas son pertinentes en la determinación del área de la región sombreada. Las justificaciones que se dan acerca del proceso, son totalmente validas, incluso propone otros caminos de solución acertados para hallar la misma área. 	<ul style="list-style-type: none"> La selección de las formas geométricas son pertinentes en la determinación del área de la región sombreada. Las justificaciones que se dan acerca del proceso, son totalmente validas, incluso propone otros caminos de solución acertados para hallar la misma área.
	Bastante facilidad en la interpretación de una forma dividida en dos partes y encajada al interior de una única forma.	Dificultad por relacionar la superposición de la forma y más aún estructuro por dibujos el proceso de la forma mas no la superposición.	Bastante facilidad en la interpretación de una forma dividida en dos partes y encajada al interior de una única forma.

NIVEL 2	CREACIÓN DE LA IMAGEN
ACTIVIDADES	AD-2.1. ¿En qué piensas cuando refieres al área entre formas geométricas? AD-2.2. ¿Con que relacionas cada uno de los elementos de la imagen?
NIVEL	DESCRIPTOR DE LOS ASPECTOS E INDICADORES
0	La actividad no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	<p>El conocimiento y la comprensión son limitados.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección de las formas geométricas es poco pertinente y solo parcialmente apropiada para la solución del área. Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son anecdóticas, no estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas y no explicativas. <p>El uso de la terminología y los conceptos es poco claro y limitado.</p> <ul style="list-style-type: none"> Es evidente que los conceptos específicos de la asignatura están ausentes o son inexactos, lo cual demuestra conocimiento y comprensión limitados.
3	<p>El conocimiento y la comprensión son buenos.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección de las formas geométricas son parcialmente adecuadas en la determinación del área de la región sombreada. Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, presentan bajas interpretaciones del área a determinar, estas no son estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas, pero no demuestran una solución. <p>El uso de la terminología y los conceptos es adecuado.</p> <ul style="list-style-type: none"> El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es, en su mayor parte, exacto y demuestra un nivel adecuado de conocimiento y comprensión.
5	<p>El conocimiento y la comprensión son excelentes.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección de las formas geométricas son pertinentes en la determinación del área de la región sombreada. Las justificaciones que se dan acerca del proceso, son totalmente validas, incluso propone otros caminos de solución acertados para hallar la misma área. <p>El uso de la terminología y los conceptos es Bueno.</p> <ul style="list-style-type: none"> El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es exacto y coherente, y demuestra un nivel eficaz de conocimiento y comprensión.

Acciones Complementarias

1	<p>El conocimiento y la comprensión son limitados.</p> <ul style="list-style-type: none">• La selección de las formas geométricas es poco pertinente y solo parcialmente apropiada para la solución del área.• Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son anecdóticas, no estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas y no explicativas. <p>El uso de la terminología y los conceptos es poco claro y limitado.</p> <ul style="list-style-type: none">• Es evidente que los conceptos específicos de la asignatura están ausentes o son inexactos, lo cual demuestra conocimiento y comprensión limitados.
---	--

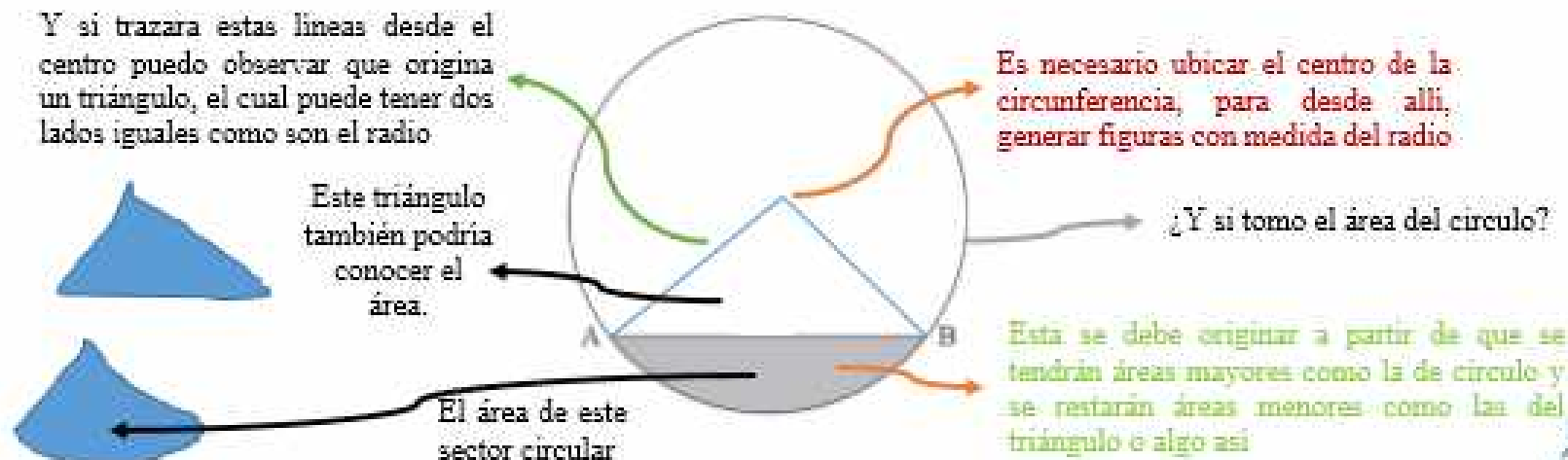
1. Dibuje bosquejos de las distintas formas de intersección (áreas), encontradas entre las siguientes formas geométricas.



TÍTULO	¿Con que relacionas cada uno de los elementos de la imagen?			COD.	AD-2.2.
Objetivo (OD-2.1.)	Reconoce y construye intersecciones entre figuras geométricas con el fin de validar posibles áreas entre dichas figuras.				
Pensamiento	Espacial y sistemas geométricos.	Acción Complementaria		Análisis de la Imagen	
Tiempo de duración.	45 minutos	Sesiones de clase	Una	Lugar	Salón Math
Nombre del estudiante				Edad	

Para el desarrollo de la presente actividad es importante el seguimiento de las instrucciones que se indican en la presente guía, para ello es necesario leer las siguientes indicaciones.

EJEMPLO: Realice las anotaciones o dibujos aproximados a los que haya lugar con el fin de evidenciar como se logró determinar el área de la región sombreada a partir de otras formas geométricas.

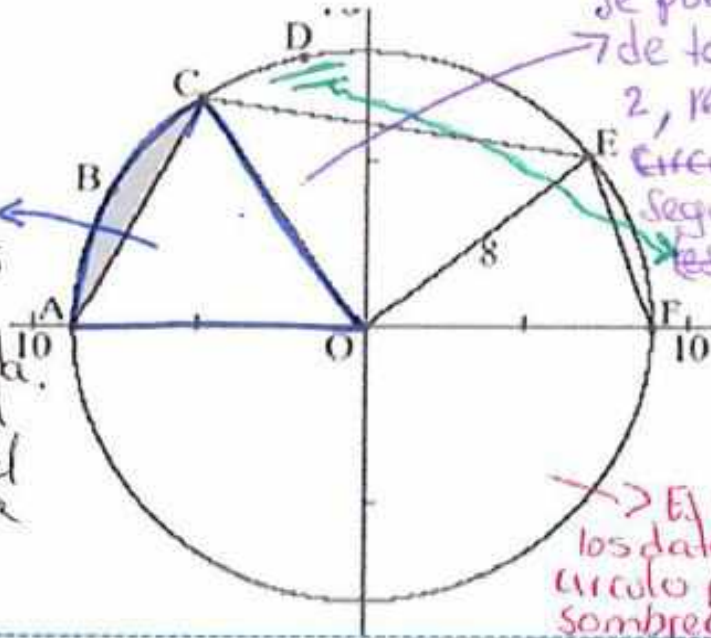


AD-2.1. ¿En qué piensas cuando refieres al área entre formas geométricas?

AD-2.2. ¿Con que relacionas cada uno de los elementos de la imagen?

Candy

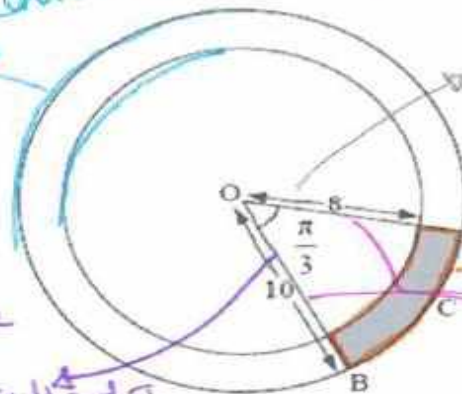
Teniendo en cuenta los triángulos presentados, identifique que (e) los lados del triángulo que estaba más cerca del área sombreada. Primero hallar el área del sector circular y después el área del triángulo para saber el valor del área sombreada.



Se puede encontrar la longitud de todo el arco del cuadrante 2, restarle el área del primer (recto) triángulo y del segundo y Finalmente (restarle) encontrar el valor y restarle a todo lo anterior

Es necesario saber los datos de la otra parte del círculo para identificar el área sombreada?

Por qué un círculo de radio 10?



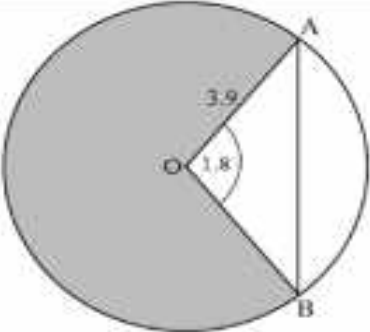
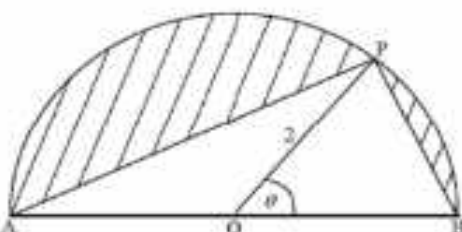
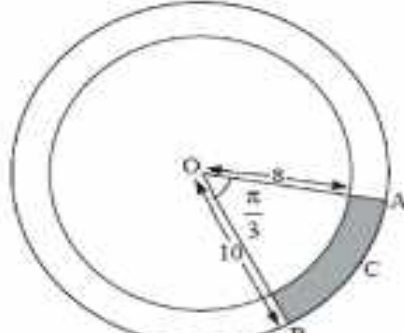
Primero se podría hallar a que equivale a $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$

el área sombreada si a la hora de resolver?

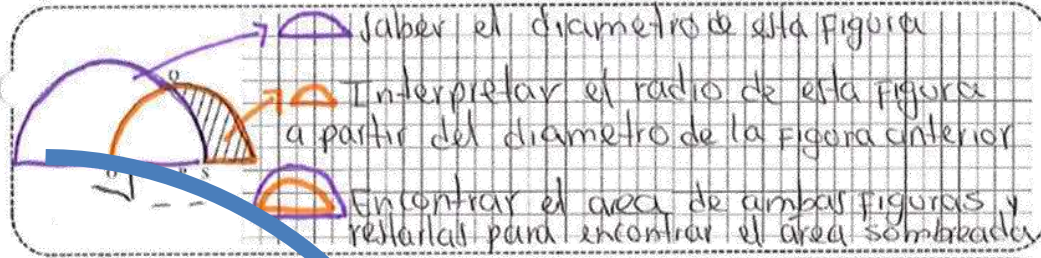
Tengo los dos lados más el ángulo

al momento de llegar a la respuesta el resultado quedara con el π

Vilma

IMAGEN DE ANALISIS	Candy	Tk Man	Mafalda	Vilma
	<ul style="list-style-type: none"> * Sacaría el área del círculo * Sacaría el área del Sector Circular. * Para determinar el área sombreada restaría al área del círculo el área del sector circular. 	<ul style="list-style-type: none"> * ¿Si se halla el área del triángulo no sombreado con el borde y se le resta a la sumatoria de los demás triángulos con sus bordes? * Se usan los teoremas del Seno y coseno. * Lo principal sería sumar el área del triángulo con el área del sector circular y restarlo al área del círculo. 	<ul style="list-style-type: none"> * Se podría hallar primero el área del triángulo con teorema del coseno. * se podría también hacer el área del sector circular y después hallar el área de todo el círculo y restar estos dos valores. * Hallar el ángulo sin sombreado y restarle a 360° el dato anterior. 	<ul style="list-style-type: none"> * Para sacar el área sombreada del círculo hay que sacar el área del triángulo y la circunferencia. * Para sacar el lado ABC puede utilizar la ley del Coseno. * Este pedazo importara? Por qué no está ni adentro, ni a fuera de la figura? * Hay que restarle el área del triángulo a la circular.
	<ul style="list-style-type: none"> * Se saca el área de la mitad del círculo. * Se saca el área del 1er triángulo. * Se saca el Área del segundo triángulo. * Se suman ambas áreas anteriores. * Al área de la mitad del círculo se restan la suma de ambas áreas. 	<ul style="list-style-type: none"> * Primero se tomaría el triángulo POB y se calcula el área y se le resta al área de medio círculo. * Se divide el semicírculo en dos partes para trabajarlos. * Con su radio y formar triángulos donde el cateto sea igual al radio. * Se halla el ángulo restando 90° y así poder encontrar el área del triángulo y restarla. 	<ul style="list-style-type: none"> * Si se desdobra el medio círculo quedaría un círculo completo. ¿El área sombreada sería la misma arriba y abajo del triángulo? * Si es un círculo a la mitad, el área estaría cortada a la mitad si es un círculo completo? * Encontrar la longitud de arco y el área de los dos triángulos ya sea por identidades, teorema del seno y coseno y finalmente sumar los valores de ambos triángulos y restarle la longitud de arco de ese medio círculo. 	<ul style="list-style-type: none"> * Tengo que usar el área del círculo y la divido en 2 por ser un semicírculo. * ¿Por qué un semicírculo y no un círculo completo? * ¿Tendré que usar Coseno o Seno? * ¿Cómo puedo hallar otro ángulo o lado si solo tengo un lado y un ángulo? * Se partirá a la mitad para encontrar más variables.
	<ul style="list-style-type: none"> * Se saca el área del sector circular mayor. * Se saca el área del Sector circular menor. * El área sombreada será la resta de estas áreas en dicho orden. 	<ul style="list-style-type: none"> * "Se determina el área del círculo pequeño y luego se encuentra el área del círculo grande, al grande se le resta el pequeño y ya está." * ¿Se usaría el Teorema del Seno y coseno? 	<ul style="list-style-type: none"> * Es necesario saber cuánto es $\pi/3$ en grados es 60°. * Puedo hallar primero la longitud de arco con radio pequeño y después el radio grande y restar estos valores. * ¿Se pueden plantear 2 áreas de las pizzas? 	<ul style="list-style-type: none"> * ¿Por qué un círculo dentro de otro? * Primero se podría hallar a que equivale $\pi/3$ O 60°. * El área sombreada será necesaria a la hora de resolver? * Tengo los dos lados <u>mas</u> el ángulo. * Al momento de llegar a la respuesta el resultado quedara con π.

1. De acuerdo con el ejemplo anterior, Dibuje bosquejos de las distintas formas de interseccion (areas), encontradas entre las siguientes formas geometricas y realice descripciones de como determinaria el area de las mismas.

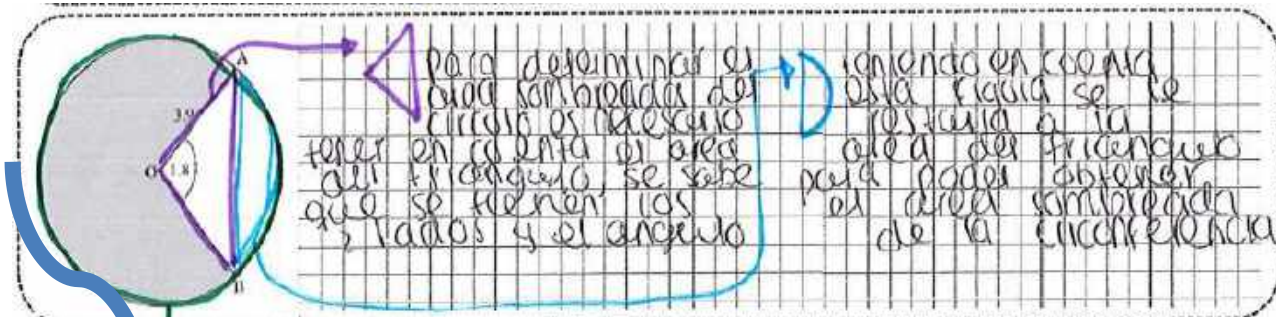


AD-2.2. ¿Con que relacionas cada uno de los elementos de la imagen?

AD-2.1. ¿En qué piensas cuando refieres al área entre formas geométricas?

N2

Nivel 2



- Vilma
- Bruce
- Mafalda
- Tk Man
- Maximus
- Candy



Ac Acciones Complementarias

TITULO	¿Cuáles son los elementos comunes y no comunes?				COD.	AD-3.1.
Objetivo (OD-2.1.)	Identifica un determinado conjunto de patrones para la consecución de un área entre figuras geométricas.					
Pensamiento	Espacial y sistemas geométricos.		Acción Complementaria	Visualización de la Imagen		
Tiempo de duración.	45 minutos	Sesiones de clase	Una	Lugar	Salón Math II	
Nombre del estudiante					Edad	

Para el desarrollo de la presente actividad es importante el seguimiento de las instrucciones por parte del supervisor, para ello es necesario leer las siguientes indicaciones.

1. Verificar que cuenta con los materiales suministrados para la sesión, como se muestra a continuación:



AD-3.1. ¿Cuáles son los elementos comunes y no comunes en las formas geométricas?

AD-3.2. ¿Cómo se pueden establecer relaciones bajo el criterio del área?

3. De acuerdo a la letra mayúscula asignada en la ficha adhiera en los siguientes espacios en blanco, el patrón operacional evidenciado en esta.

A Se calcula el área interna al interior de otra área y se restan

C

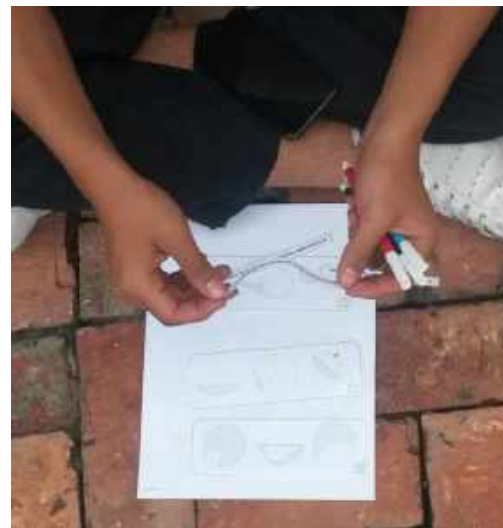
Bruce

3. De acuerdo a la letra mayúscula asignada en la ficha adhiera en los siguientes espacios en blanco, el patrón operacional evidenciado en esta.

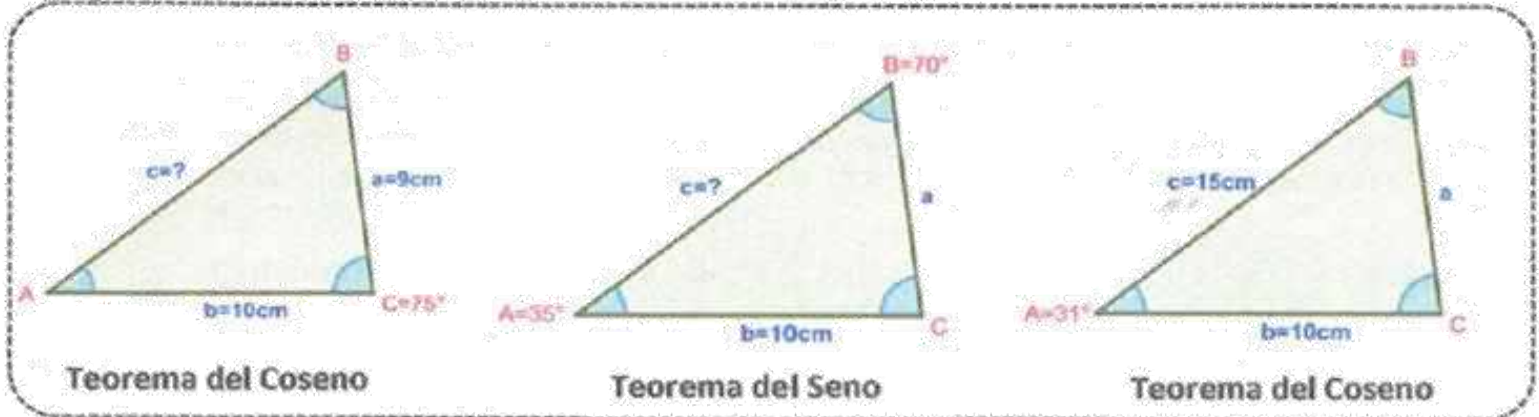
A Se calcula el área menor y se resta al área mayor

A

Candy



5. Cuando no se conoce uno de los lados en un triángulo que no es rectángulo, o uno de sus ángulos, es indispensable emplear el teorema del Seno o el teorema del Coseno, una de las preguntas que se suele hacer al profesor es "¿Cuándo sabemos en qué momento se puede emplear alguno de los teoremas?", para ello observemos las siguientes imágenes, y escribe tus propias conclusiones:



*Teorema coseno: Se usa cuando se tienen dos lados que forman un ángulo.
 *Teorema seno: Se usa cuando se tienen dos ángulos y un lado.

Maximus

ESTUDIANTE	Patrón No. 1 (A)	Patrón No. 2 (B)	Patrón No. 3 (C)	Patrón Procedimental -Área del triángulo-	Patrón Procedimental -Teorema Seno & Coseno-
Candy	3	1	2	El patrón procedimental es la relación entre los lados y el ángulo completando ABC con a,b,c.	El teorema que se utiliza depende de los datos que tenemos, en el primero se haya un lado cuando tenemos que forman un ángulo y el otro cunado dos están opuestos.
Tk Man	1	3	2	La relación entre los lados y el ángulo indica emplear el teorema del Coseno.	El teorema que se utiliza depende de los datos que tenemos, en el primero se haya un lado cuando tenemos que forman un ángulo y el otro cunado dos están opuestos.
Maximus	1	3	2	Primero se tiene que saber la fórmula para describir el área de un triángulo, en el triángulo se puede hallar el área siguiendo el siguiente patrón: En los tres triángulos se tienen los lados que forman un ángulo.	El teorema del Coseno se usa cuando tienes dos lados que conforman un ángulo y el teorema del Seno un lado opuesto.

NIVEL 3	COMPRESIÓN DE I
ACTIVIDADES	AD-3.1. ¿Cuáles son los elementos comunes y n AD-3.2. ¿Cómo se pueden establecer relaciones
NIVEL	DESCRIPTOR DE LOS ASPEC'
0	La actividad no alcanza ninguno de los niveles e figuran a continuación.
1	El conocimiento y la comprensión son limitad <ul style="list-style-type: none"> La selección del patrón procedimental es apropiado para la solución de la situación. Las justificaciones que se dan acerca del conoc estructuradas y, en su mayor parte, son descriptiv El uso de la terminología y los conceptos es po <ul style="list-style-type: none"> Es evidente que los conceptos específicos de la son inexactos, lo cual demuestra conocimiento y
3	El conocimiento y la comprensión son buenos <ul style="list-style-type: none"> La selección del patrón procedimental es parcial situación. Las justificaciones que se dan acerca del co interpretaciones del concepto, estas no son est descriptivas, pero no demuestran una solución. El uso de la terminología y los conceptos es ad <ul style="list-style-type: none"> El uso de la terminología y los conceptos espec parte, exacto y demuestra un nivel adecuado de c
5	El conocimiento y la comprensión son excellen <ul style="list-style-type: none"> La selección del patrón procedimental es pertin Las justificaciones que se dan acerca del pro propone otros caminos de solución acertados par El uso de la terminología y los conceptos es Bu <ul style="list-style-type: none"> El uso de la terminología y los conceptos espec coherente, y demuestra un nivel eficaz de conoci

1. ¿Qué elementos son comunes al interior de las siguientes formas generales del área de un triángulo?

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

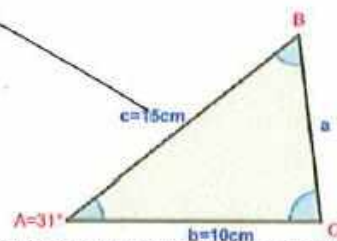
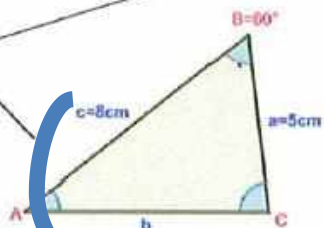
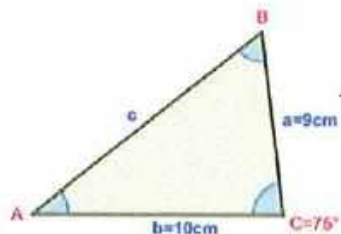
Los lados del triángulo y los diferentes ángulos, lo cual permite hallar el área del triángulo, con los elementos que el ejercicio da.

2. Relacione las formas generales del área del triángulo con las imágenes indicadas. (Emplee una línea para ello)

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$



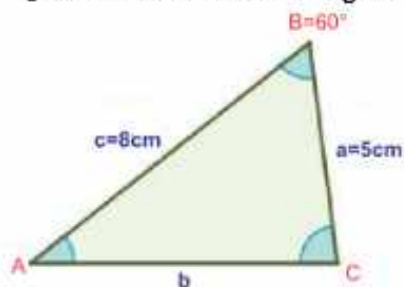
1	<p>El conocimiento y la comprensión son limitados.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección del patrón procedimental es poco pertinente y solo parcialmente apropiado para la solución de la situación. Las justificaciones que se dan acerca del conocimiento del tema, son anecdóticas, no estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas y no explicativas. <p>El uso de la terminología y los conceptos es poco claro y limitado.</p> <ul style="list-style-type: none"> Es evidente que los conceptos específicos de la asignatura están ausentes o son inexactos, lo cual demuestra conocimiento y comprensión limitados.
	<p>El conocimiento y la comprensión son buenos.</p> <ul style="list-style-type: none"> La selección del patrón procedimental es parcialmente adecuado en la solución de la situación.

TÍTULO	¿Cómo se pueden establecer relaciones bajo el criterio del área?			COD.	AD-3.2.
Objetivo (OD-2.1.)	Identifica cada uno de los elementos que pueden relacionar la imagen con un concepto.				
Pensamiento	Espacial y sistemas geométricos.	Acción Complementaria	Expresión de la Imagen		
Competencia MEN	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en contextos de área.				
Población de estudio	Los 30 estudiantes de grado Decimo (10), pertenecientes al año uno del programa del Diploma del Bachillerato Internacional (IB), del Gimnasio Campestre Los Cerezos (Cajicá) quienes se encuentran en un rango de edad entre los 15 a 18 años, son entonces la población de estudio de la presente propuesta de Investigación.				
Tiempo de duración.	45 minutos	Sesiones de clase	Una	Lugar	Salón Math II
Nombre del estudiante				Edad	

Para el desarrollo de la presente actividad es importante el seguimiento de las instrucciones por parte del supervisor, para ello es necesario leer las siguientes indicaciones.

1. Marque con una **X** si está de acuerdo o en desacuerdo, con la forma general presentada para la solución a la pregunta que se indica. Si está en desacuerdo, escriba en la cuadrícula la forma general correcta para la solución

¿Calcular el área del triángulo?



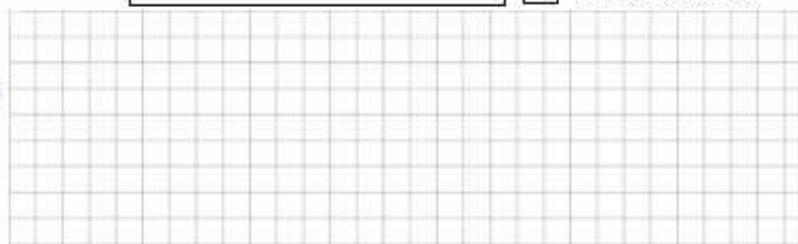
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

☐

De acuerdo

☐

En desacuerdo

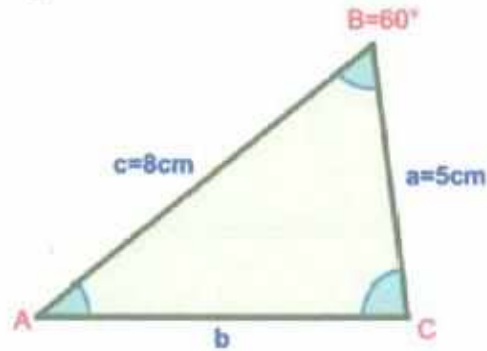


AD-3.1. ¿Cuáles son los elementos comunes y no comunes en las formas geométricas?

AD-3.2. ¿Cómo se pueden establecer relaciones bajo el criterio del área?

1. Marque con una **X** si está de acuerdo o en desacuerdo, con la forma general presentada para la solución a la pregunta que se indica. Si está en desacuerdo, escriba en la cuadrícula la forma general correcta para la solución

¿Calcular el área del



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$



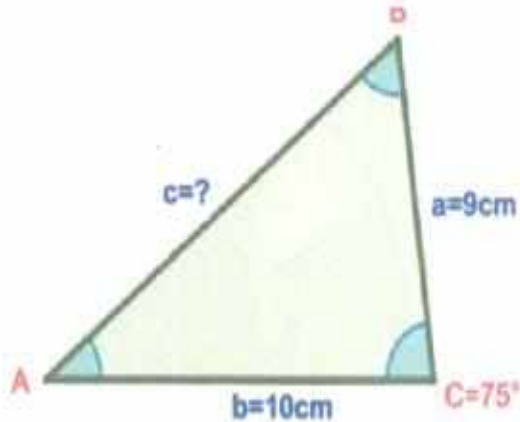
De acuerdo



En desacuerdo

Con estos dos lados se puede calcular el Área, pero es necesario saber el Seno del Ángulo

¿Determine el lado c del



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

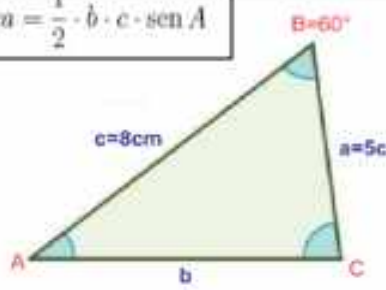
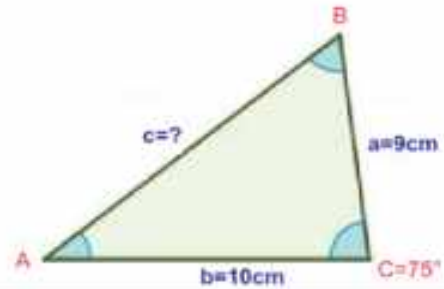
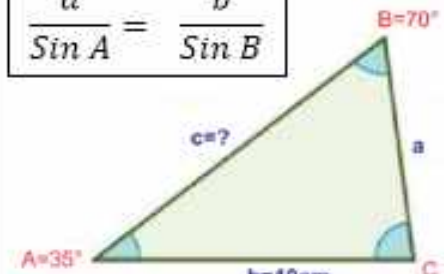


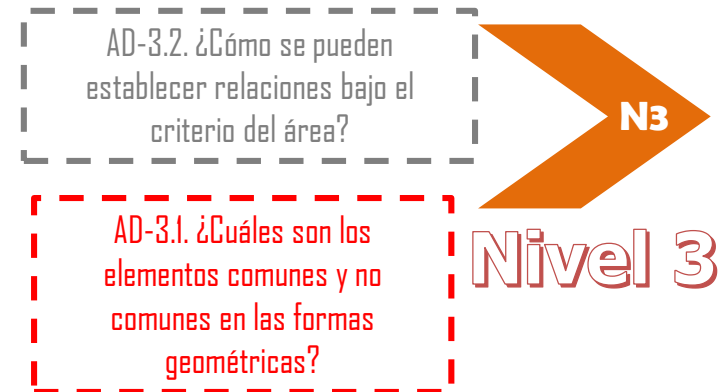
De acuerdo



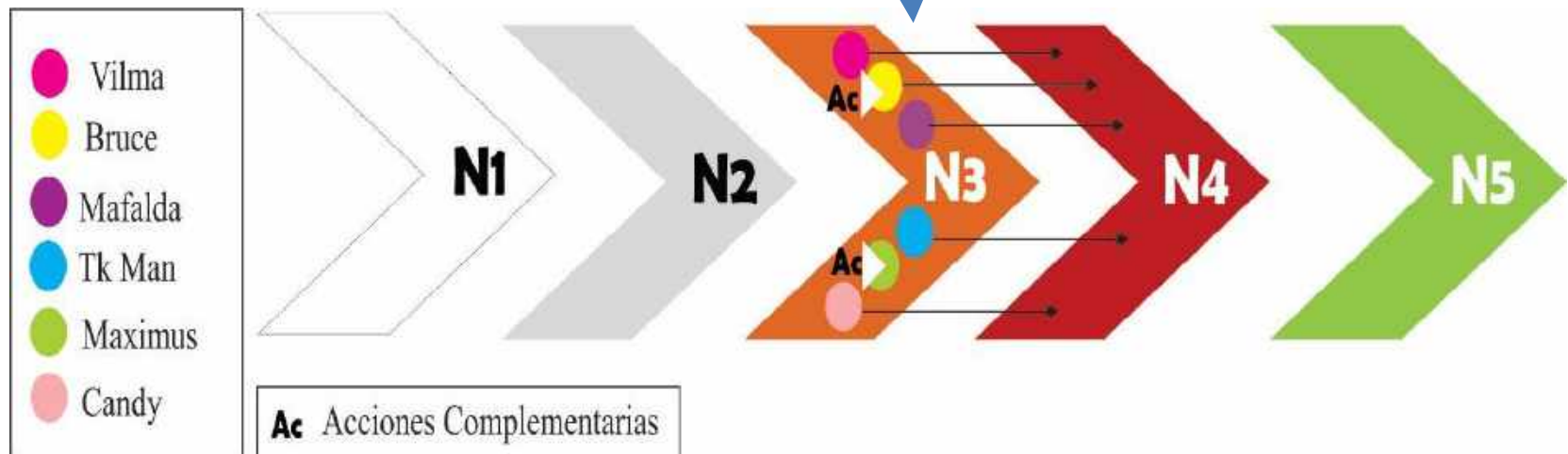
En desacuerdo

Los dos lados no construyen el ángulo

IMAGEN DE ESTUDIO	Estudiante No. 19	Estudiante No. 15	Estudiante No. 28
<div data-bbox="57 257 347 342"> $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ </div> 	<p>EN DESACUERDO Porque los lados con los que se construye el ángulo A, no se conoce el valor de el lado b, por ello la forma general sería mas bien:</p> $A = 1/2 a \cdot c \cdot \sin (B)$	<p>EN DESACUERDO Puesto que los dos lados que se tiene en la formula no son coherentes con el ángulo que se conoce, por eso es:</p> $A = 1/2 a \cdot c \cdot \sin (B)$	<p>DE ACUERDO Con estos dos lados se puede calcular el área, pero es necesario sacar el seno del ángulo.</p>
 <div data-bbox="57 921 502 978"> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ </div>	<p>EN DESACUERDO Porque si se quiere conocer el lado, es indispensable conocer la medida de los lados b y a, por ello la formula sería mejor:</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	<p>EN DESACUERDO la fórmula que se tiene no sirve para el cálculo del lado c, porque se conoce el lado a y el lado b:</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	<p>EN DESACUERDO El lado que está despejado no coincide con lo que hay que calcular</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
<div data-bbox="57 1013 347 1113"> $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ </div> 	<p>EN DESACUERDO Porque para poder aplicar el teorema del Seno, los lados son opuestos, por tanto la formula sería:</p> $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$	<p>EN DESACUERDO Se debe cambiar la fórmula que nos dan, puesto que el ángulo A no se conoce su lado, se debe también restar a 180° para hallar el ángulo de</p> $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$	<p>EN DESACUERDO No se tiene todos los datos para solucionarlo</p>



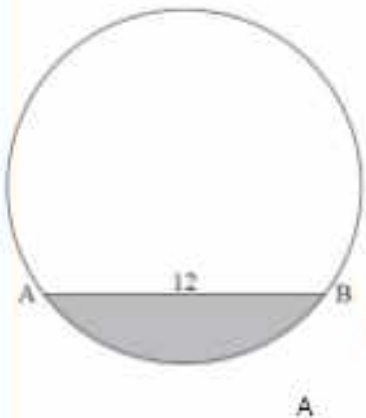
En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda sustancias distintas a ese particular nivel.



TÍTULO	Unas buenas predicciones para unas buenas actuaciones.			COD.	AD-4.1.
Objetivo (OD-2.1.)	Identifica cada uno de los elementos que pueden relacionar la imagen con un concepto.				
Pensamiento	Espacial y sistemas geométricos.	Acción Complementaria	Predicción & registro Propiedad		
Tiempo de duración.	45 minutos	Sesiones de clase	Una	Lugar	Salón Math II
Nombre del estudiante				Edad	

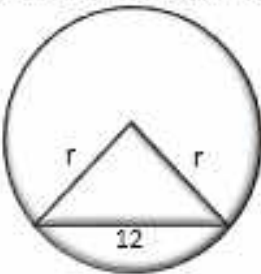
Para el desarrollo de la presente actividad es importante el seguimiento de las instrucciones por parte del supervisor, para ello es necesario leer las siguientes indicaciones.

- De acuerdo a la imagen mostrada, estructure los tres pasos que se muestran en el siguiente ejemplo.



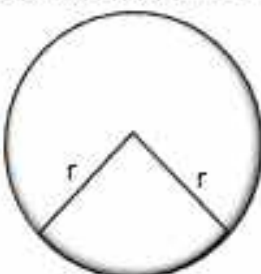
EJEMPLO: En la siguiente figura se muestra un círculo de radio $r=8\text{cm}$, donde el segmento $AB=12\text{cm}$. Halle el área de la región sombreada.

1ER PASO. Realizar un bosquejo de las figuras geométricas que están presentes en la construcción de la figura, esto ayuda a encaminar las conexiones entre las partes de la imagen y los conceptos que apoyan el área final.

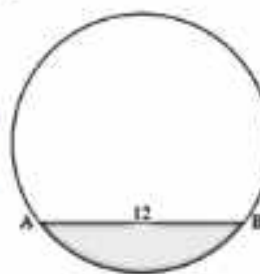


$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
Teorema del Coseno



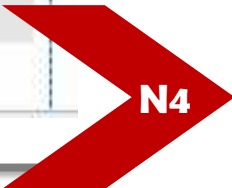
$A = \frac{1}{2} \theta r^2$

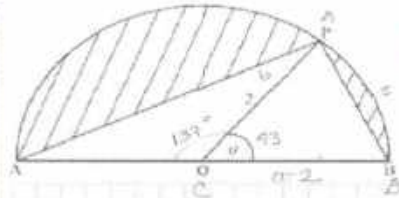


Área = A sector - A triángulo

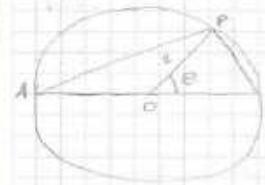
AD-4.1. Unas buenas predicciones para unas buenas actuaciones.

AD-4.2. Escribe tus buenas actuaciones





EJERCICIO No.1: En la siguiente figura se muestra un círculo de radio $r=2\text{cm}$, donde el ángulo $\theta = 43^\circ$. Halle el área de la región sombreada.



+ Completo el círculo

2. Calculo el área del triángulo más pequeño por medio de la fórmula general ya que tengo el ángulo y los dos lados necesarios
 $A = \frac{1}{2} ab \sin C$
 que sería: $A = \frac{1}{2} (2)(2) \sin 43^\circ$

3. Calculo el área del triángulo más grande ya que si conozco el otro ángulo y se que la suma de ángulos es 180° entonces resto:
 $180 - 43 = 137^\circ$
 y allí conociendo los otros dos lados solo el área de este
 $A = \frac{1}{2} ab \sin C$
 que sería: $A = \frac{1}{2} (2)(2) \sin 137^\circ$



4. Posterior a esto sumo ambas áreas para sacar el área del triángulo total

$$\Sigma \text{Áreas} = \left(\frac{1}{2} (2)(2) \sin 43^\circ \right) + \left(\frac{1}{2} (2)(2) \sin 137^\circ \right)$$



Área sombreada

5. Para sacar el área del sector circular utilizo la fórmula:
 πr^2 que representa la mitad del círculo
 que sería: $\pi (2)^2$

6. Para finalizar y sacar el área sombreada le resto al área del sector circular el área de los triángulos de esta manera:

$$\text{Área} = \text{Área Sector} - (\text{Área triángulo})$$

$$\text{Área} = \pi (2)^2 - \left[\left(\frac{1}{2} (2)(2) \sin 43^\circ \right) + \left(\frac{1}{2} (2)(2) \sin 137^\circ \right) \right]$$

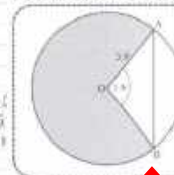
1. A partir de las siguientes formas generales, pare el cálculo del área, seleccione las formas generales adecuadas a la situación (subráyelas) y enumere una serie de pasos que evidencien el procedimiento a seguir y determine su solución.

$A = \frac{1}{2} b^2 \sin A$ $A = \frac{1}{2} bc \sin A$ $A = \frac{1}{2} ab \sin C$ $A = \frac{1}{2} a^2 \sin A$ $A = \frac{1}{2} b^2 \sin B$ $A = \frac{1}{2} c^2 \sin C$

Pasos:

1. Hallar el Área del Círculo
2. Hallar el Área del Triángulo (No)
3. Hallar el Área Sector Circular (Pizza)
3. Restar círculo - Área Pizza

Determine el Área de la región sombreada.



$A = \pi r^2$
 $A = \pi \cdot 2^2$
 $A = 4\pi$
 $A = 12.56$
 $A_{\text{sombro}} = 4\pi - 12.56 = 3.14$

Acciones de
Complementariedad

3

El conocimiento y la comprensión son buenos.

- La selección de los conceptos y el diseño de bosquejos descriptivos son parcialmente adecuados en la consolidación de una propiedad de la imagen.
- Las justificaciones que se dan en el proceso, presentan bajas interpretaciones del concepto, estas no son estructuradas y, en su mayor parte, son descriptivas, pero no demuestran una solución.

El uso de la terminología y los conceptos es adecuado.

- El uso de la terminología y los conceptos específicos de la asignatura es, en su mayor parte, exacto y demuestra un nivel adecuado de conocimiento y comprensión.



AUTOEVALUACION DE HABILIDADES									
ESTUDIANTE						EDAD	16		
Conocer tu opinión acerca de las siguientes cuestiones que realizaste en cada una de las actividades de la investigación es muy importante, por ello marca con una X, el grado de acuerdo con el indicador mostrado.									
NIVEL DE COMPRESION	1	2	3	4	5	ESCALA			
						DE ACUERDO			DE ACUERDO

INDICADORES

1. Creo que construir una serie de descripciones alrededor de una comprensión del mismo.
2. El uso de dibujos, esquemas o bosquejos permiten plasmar el proceso del proceso.
3. Creo que descomponer una imagen en las diferentes formas ayuda a encaminar mi comprensión.
4. Escribir las justificaciones de lo que he pensado es algo innecesario basta con la respuesta que determino en el proceso.
5. Pienso que desarrollar un paso a paso de las acciones que voy a realizar me da resultados del área a determinar.
6. Pienso que el proceso de comprensión en matemáticas, es algo que se va transformando, gracias a una secuencia de acciones que lo encaminan.
7. Todo lo que he plasmado en cada una de las actividades de esta investigación, es resultado de mi mejor esfuerzo en el aprendizaje.
8. Pienso que mi comprensión en el estudio de las expresiones del área en el sector circular se vio fortalecida por el conjunto de actividades que desarrolle en la investigación.
9. Me da igual, como pueda comprender un concepto en matemáticas, es preferible el desarrollo de unos ejercicios y un par de explicaciones.
10. He participado de esta investigación con interés, compromiso y motivación.

Escriba a continuación cada uno de los aspectos positivos y negativos.

- Considero que sistemáticamente genera resultados positivos el uso de este método de enseñanza.
- Para ser aplicado en un calendario escolar considero que no es viable puesto que el tamaño de cada grupo al aumentar exponencialmente se extiende demasiado el tiempo requerido para completar el avance esperado.
- Reflexionando al respecto de las actividades desarrolladas pienso que es muy pertinente que los temas más complejos que se vean en un programa escolar sean enseñados con este método.
- Veo mucha viabilidad al enseñar estos temas que se le dificultan a un estudiante pues creo que esas dificultades se verían superadas.

X				
X				
X				
		X		
	X			

CONCLUSIONES

Sobre **La Pregunta de Investigación**

1. Estructurando procesos de creación de la imagen en el estudiante.
2. Redefiniendo procesos de solución en el estudiante.
3. Estableciendo una secuencia de pasos en términos de la solución

El Objetivo General

La aplicación de cada una de las actividades que conformaron la unidad didáctica, se concluye que:

La imagen del concepto en el estudiante se reconfiguro, gracias a las tareas de realización, análisis, visualización y creación de la imagen, cada una de ellas, como andamios cognitivos para la consolidación de la comprensión.

Es asumir que la comprensión de un estudiante en matemáticas, está condicionada a la adquisición de conceptos que el estudiante logra, cuando construye acertadamente la *imagen del concepto*, pues ratificando la posición de Vinner (1991)

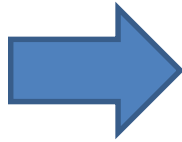
...no es gratuito que la teoría de Pirie y Kieren dedique más del cincuenta por ciento de sus postulados (Nivel uno al cuatro), ha asegurar que el estudiante estructure acertadamente la imagen del concepto, para luego implementar los niveles de...

...Allí la descripción de la estudiante proporciono una garantía de sus interpretaciones...

CONCLUSIONES

Sobre **Los Objetivos Específicos**

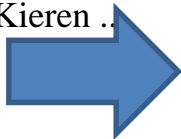
1. Identificar las nociones o conocimientos existentes en el grupo de estudiantes ...



La identificación de los conocimientos primitivos, fue el punto de partida para el diseño cada una de las acciones de complementariedad al interior de cada nivel de comprensión, además, se puede inferir, que estos procesos de reconocimiento de conocimientos previos, muestran la realidad existente frente a la imagen que han construido los estudiantes de un determinado concepto.

Las características del conocimiento primitivo evidenciado en los estudiantes, son muestra de que la comprensión es la conciencia del obstáculo....

2, Diseñar una unidad didáctica basada en el marco de la teoría de Pirie y Kieren ..

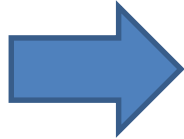


...se logró articular cada uno de los niveles de comprensión desde los conocimientos primitivos evidenciados, pero es importante resaltar, el grado de secuencialidad que mostraron cada una de estas actividades (primeros cuatro niveles), con la consolidación de la imagen del concepto en el estudiante...

CONCLUSIONES

Sobre **Los Objetivos Específicos**

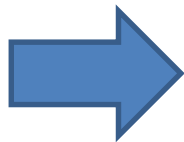
3. Aplicar la unidad didáctica, con el fin de articular los niveles de comprensión



La articulación de los cuatro primeros niveles, fue tomando forma en la medida que los estudiantes de manera inconsciente realizaban procesos de redoblamiento, al estructurar análisis de imagen con habilidades anteriormente aprendidas.

“El redoblamiento permite a una persona funcionar en un nivel exterior y enfrentarse con un desafío para regresar a un nivel de comprensión más interno con el fin de reconstruir esa comprensión como base para nuevos niveles externos de comprensión” (Londoño, 2017)

4. Determinar la influencia de la unidad didáctica implementada desde el marco



el conjunto de actividades que conforman la unidad didáctica influenciaron la comprensión del estudiante, al punto que reconfiguraron aspectos claves como: Los procesos de creación de la imagen, los procesos de solución en el estudiante y el establecimiento de una secuencia de pasos en términos de la solución

“si un estudiante se mueve entre límites de falta de necesidad significa un importante cambio cualitativo en la comprensión. No obstante, es posible que un estudiante regrese a niveles bajos de comprensión, aun cuando hayan sido superados límites de falta de necesidad previamente”. (Londoño, 2017).

RECOMENDACIONES

- * En lo que respecta a futuras investigaciones a realizar bajo el marco de la teoría de Pirie y Kieren, se sugiere encaminar diferentes etapas que permitan primero la consolidación de la imagen y luego la formalización y demostración final del concepto.
- * La verificación de los conocimientos primitivos, implica dedicar un buen tiempo de la investigación, como fundamento en el diseño de las acciones complementarias a realizar.
- * Es tipo de investigaciones ligadas a la teoría de Pirie y Kieren, se pueden desarrollar de una manera más acertada, empleando muestras de la población de forma heterogénea.



Referencias

- * Ardila, D. &. (2016). *Propuesta para la comprensión de las razones trigonométricas en el marco del modelo educativo de van Hiele (Tesis de Maestría)*. Medellín : Universidad de Antioquia .
- * Arias, J. &. (2015). *La comprensión del concepto límite de una función en un punto en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Tesis de Maestría)*. Medellín : Universidad de Antioquia
- * Buchanan, L. (2012). *Matemáticas Nivel Medio*. Londres: Oxford.
- * Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. México D.F.: Mc Graw Hill.
- * Internacional, O. B. (Marzo de 2008). *IBO*. Obtenido de *<https://www.ibo.org/globalassets/digital-toolkit/brochures/what-is-an-ib-education-es.pdf>
- * Jaramillo, J. M. (2009). *Comprensión del significado desde Vygotsky, Bruner y Gergen*. Bogotá D.C.: Universidad Santo Tomas.
- * Meel, D. (2003). *Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría*
- * APOE. México D.F.: Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa .
- * MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas* . Bogotá. D.C.: MEN.
- * MEN. (2005). *ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMATICAS*. BOGOTA
- * MEN. (1 de Agosto de 2015). *Ministerio de Educación Nacional*. Obtenido de Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles172061_archivo_pdf_decreto1860_94.pdf
- * Pulgarín, C. (2014). *Aproximación del concepto de curva mediante el pliegue de superficies en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Tesis de Maestría)*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- * Stewart, I. (Mayo, 2007). *Historia de las matemáticas: En los últimos 10000 años*. Coventry: Planeta.



Gracias



Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>

@uedUniandes